## *Исследование линейных цепей несинусоидального тока*

**Цель:** исследование гармонического состава кривых напряжения и тока в линейных электрических цепях с источником несинусоидального напряжения. Экспериментально определяется влияние индуктивной катушки и конденсатора на форму кривой тока в цепи с источником несинусоидального напряжения.

## Общие сведения

Несинусоидальное периодическое напряжение, приложенное к электрической цепи, можно разложить в ряд Фурье:

$$u(t) = U_0 + \sum U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

где

$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega t)d\omega t;$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega t)\sin(k\omega t)d\omega t;$$

$$C_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega t)\cos(k\omega t)d\omega t;$$

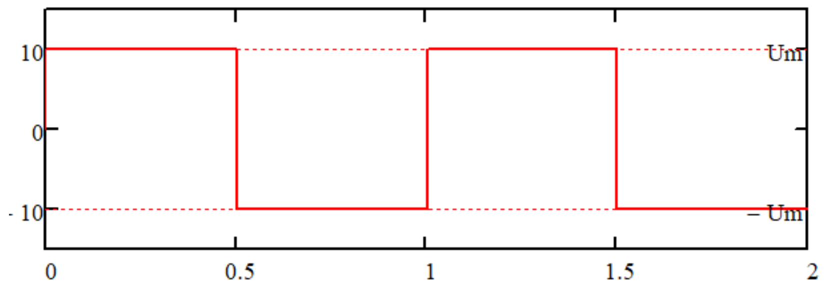
$$U_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \quad \psi_k = \begin{cases} \operatorname{arctg}(C_k / B_k), & B_k \ge 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}(C_k / B_k) & B_k < 0 \end{cases}.$$

Период напряжения T связан с частотой первой гармоники следующим образом: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Вычислим коэффициенты Фурье для различных форм несинусоидального сигнала, заданных на отрезке [0, *T*].

**1. Прямоугольный двухполярный импульс.**

$$u(t) = \begin{cases} U_m & t \le T/2; \\ -U_m & t > T/2. \end{cases}$$



$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} U_m d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} U_m d\omega t\right) = 0$$

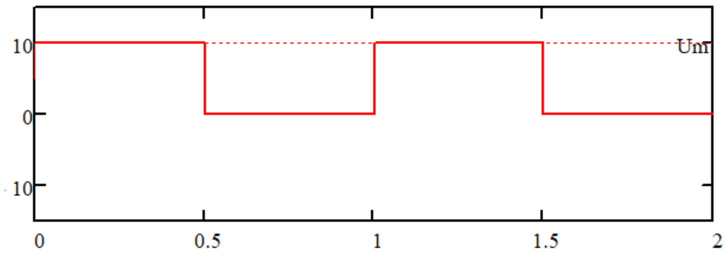
$$B_k = \frac{U_m}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(k\omega t) d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(k\omega t) d\omega t\right) = \frac{U_m}{\pi k}\left(2 - 2\cos(k\pi)\right);$$

$$C_k = \frac{U_m}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos(k\omega t) d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(k\omega t) d\omega t\right) = 0;$$

$$U_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} = \frac{2U_m}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right); \quad \psi_k = 0.$$

## 2. Прямоугольный однополярный импульс

$$u(t) = \begin{cases} U_m & t \le T/2; \\ 0 & t > T/2. \end{cases}$$




$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} U_m d\omega t - 0\right) = \frac{U_m}{2}$$

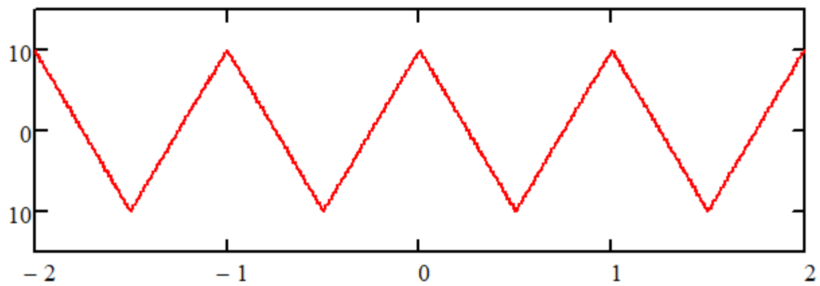
$$B_k = \frac{U_m}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(k\omega t) d\omega t - 0\right) = \frac{U_m}{\pi k}\left(1 - \cos(k\pi)\right);$$

$$C_k = \frac{U_m}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos(k\omega t) d\omega t - 0\right) = 0;$$

$$U_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} = \frac{U_m}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right); \quad \psi_k = 0.$$

## 3. Треугольный импульс

$$u(t) = \begin{cases} U_m\left(1 - \frac{4t}{T}\right) & t \le T/2; \\ U_m\left(-3 + \frac{4t}{T}\right) & t > T/2. \end{cases}$$



$$U_0 = \frac{U_m}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(1-\frac{4\omega t}{2\pi}\right)d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi}\left(-3+\frac{4\omega t}{2\pi}\right)d\omega t\right) = 0$$

$$B_k = \frac{U_m}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(1-\frac{4\omega t}{2\pi}\right)\sin(k\omega t)d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi}\left(-3+\frac{4\omega t}{2\pi}\right)\sin(k\omega t)d\omega t\right) = 0$$

$$C_k = \frac{U_m}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(1-\frac{4\omega t}{2\pi}\right)\cos(k\omega t)d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi}\left(-3+\frac{4\omega t}{2\pi}\right)\cos(k\omega t)d\omega t\right) =$$

$$= \frac{4U_m}{\pi^2 k^2}\left(1-(-1)^k\right);$$

$$U_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} = \frac{4U_m}{\pi^2 k^2}\left(1-(-1)^k\right); \quad \psi_k = \frac{\pi}{2}.$$

**Расчет токов и напряжений для гармоники с номером k.**

На вход последовательной RLC-цепи подается одна из гармонических составляющих входного напряжения $u_k(t)$. Рассчитаем реакцию цепи на это воздействие.

$$u_k(t) = U_{km}\sin(k\omega t + \psi_k),$$

Перейдём к комплексному действующему значению:

$$\underline{U}_k = \frac{U_{km}}{\sqrt{2}}e^{j\psi_k} = U_k e^{j\psi_k}$$

Комплексное и полное сопротивление цепи будут равны, соответственно:

$$\underline{Z}_k = R + R_L + jk\omega L + \frac{1}{jk\omega C},$$

$$Z_k = \sqrt{\left(R+R_L\right)^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}$$

Сдвиг фаз между током и напряжением для k-ой гармоники:

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R+R_L}\right).$$

Получим выражение для *k*-ой гармоники тока:

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k}, \quad I_k = \frac{U_k}{Z_k}$$

$$i_k(t) = \frac{U_{km}\sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k)}{\sqrt{\left(R+R_k\right)^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}$$

Затем вычислим напряжение на конденсаторе:

$$\underline{U}_{Ck} = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k}\frac{1}{j\omega C}, \quad U_{Ck} = \frac{U_k}{Z_k}\frac{1}{\omega C},$$

$$u_{Ck}(t) = \frac{U_{km}\sin\left(k\omega t + \psi_k - \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right)}{\omega C\sqrt{\left(R+R_k\right)^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

Следует отметить, что в данной цепи у тока не будет постоянной составляющей ($k$=0), поскольку конденсатор не проводит постоянный ток $I_0$=0. А вот напряжение на конденсаторе будет иметь постоянную составляющую, и по второму закону Кирхгофа она будет равна нулевой гармонике напряжения на источнике $U_{C0}=U_0$

Расчёт цепи проводят с использованием принципа наложения в следующей последовательности:

- рассчитывают цепь при постоянном приложенном напряжении $U_0$;
- рассчитывают цепь (обычно комплексным методом) при синусоидальном приложенном напряжении с амплитудой $U_{1m}$, начальной фазой $\Psi_1$ и частотой $\omega$ ($k$=1);
- повторяют расчёт при k = 2, 3, 4, …, учитывая, что индуктивные сопротивления увеличиваются с ростом частоты ( $X_L = k\omega L$ ), а ёмкостные уменьшаются ( $X_C = 1/\omega C$ );
- переходят к мгновенным значениям и суммируют постоянную и синусоидальные составляющие тока (напряжения) в каждой ветви;
- определяют действующие значения токов и напряжений, а также мощности по формулам:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum U_k^2};\ I = \sqrt{I_0^2 + \sum I_k^2};$$
$$P = U_0 I_0 + \sum U_k I_k \cos\varphi_k;\ Q = \sum U_k I_k \sin\varphi_k; S = UI,$$

где $U_k$, $I_k$ – действующие значения синусоидальных составляющих.

Чем больше гармоник взято для расчёта, тем выше точность полученных результатов. На рис.1 приведен в качестве примера экспериментальный график тока в цепи с последовательным соединением *R, L*, и *C* при двуполярном прямоугольном приложенном напряжении. На этот график наложены в том же масштабе два расчётных графика: один сделан с учётом только первой и третьей гармоник, а в другом учтены 5 гармоник - с первой по одиннадцатую.

В приложениях 1 и 2 приведены MathCAD и MATLAB программы расчёта этих графиков с комментариями.

При анализе цепи несинусоидального тока можно вычислить коэффициенты, которые используются для характеристики формы периодических кривых

Коэффициент амплитуды (Ка) — отношение максимального значения тока (или напряжения) к действующему значению.

Коэффициент формы (Кформ) — отношение действующего значения тока (или напряжения) к среднему по модулю значению.

Коэффициент искажения (Ки) — отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению величины рассматриваемой кривой.

Коэффициент гармонических искажений (КГИ) — отношение среднеквадратичного напряжения суммы высших гармоник сигнала, кроме первой, к напряжению первой гармоники.

## Экспериментальная часть

### Задание

Рассчитать мгновенное и действующее значение тока и напряжения на конденсаторе, а также потребляемую цепью активную мощность при несинусоидальном напряжении одной из трех форм:

1) прямоугольный двухполярный импульс;
2) прямоугольный однополярный импульс;
3) треугольный импульс.

Построить график изменения тока на входе цепи, проверить результаты расчёта путём осциллографирования и непосредственных измерений.

В виртуальной лаборатории Multisim собрать исследуемую цепь, представив модель входного сигнала в виде четырёх последовательно соединённых источников напряжения, соответствующих первым гармоническим составляющим входного сигнала. Получить осциллограммы входного напряжения и напряжения на емкости. Измерить действующие значения тока, напряжений и активную мощность цепи.

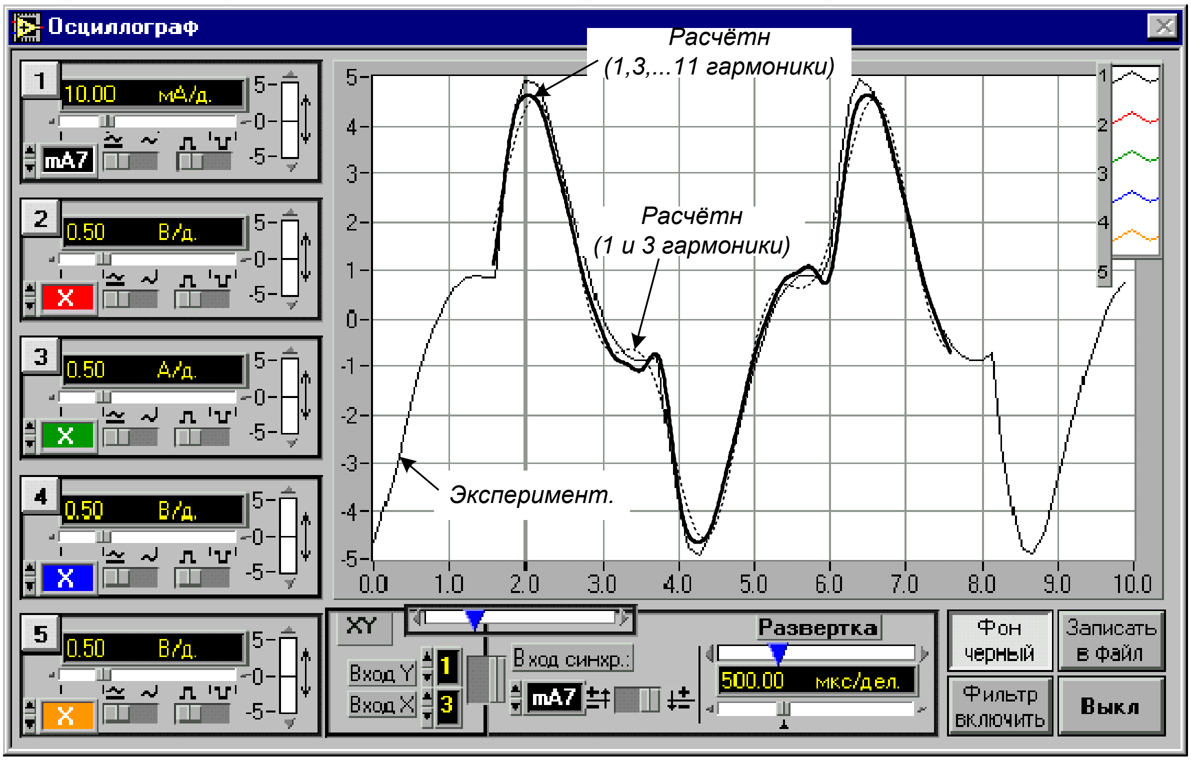



Рис. 1

## Порядок выполнения работы

Таблица 1.

| № стенда | Форма | Частота, Гц | $R$, Ом | $L$, мГн | $R_K$, Ом | $C$, мкФ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 11 | 1 | 500 | 47 | 33 | 65 | 0.22 |
| 2, 12 | 2 | 500 | 100 | 100 | 190 | 0.47 |
| 3, 13 | 3 | 500 | 150 | 33 | 65 | 1 |
| 4, 14 | 1 | 600 | 220 | 100 | 190 | 0.22 |
| 5, 15 | 2 | 600 | 47 | 100 | 190 | 0.47 |
| 6, 16 | 3 | 600 | 100 | 33 | 65 | 1 |
| 7, 17 | 1 | 700 | 150 | 100 | 190 | 0.22 |
| 8, 18 | 2 | 700 | 220 | 33 | 65 | 0.47 |
| 9, 19 | 3 | 700 | 47 | 100 | 190 | 1 |
| 10, 20 | 1 | 800 | 100 | 33 | 190 | 0.22 |

- Выберите вариант в соответствии с номером стенда (табл. 1) и выполните расчёт согласно заданию, учитывая основную гармонику и одну – две высших. По результатам расчёта мгновенных значений на рис. 2 постройте графики, а действующие значения и мощность занесите в табл. 2. Примеры расчетов в программах MathCad и Matlab приводятся в приложениях.

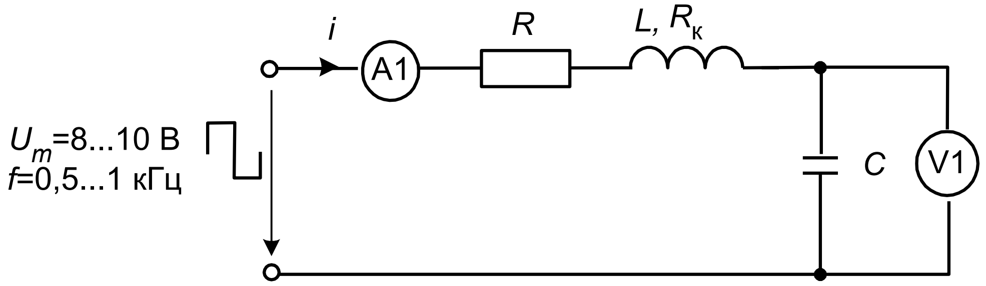



Рис. 2

- Соберите цепь (рис. 2) с принятыми в расчёте параметрами элементов, включите виртуальные приборы для измерения действующих значений тока и напряжения на конденсаторе и осциллограф. Монтажная схема показана на рис. 3.

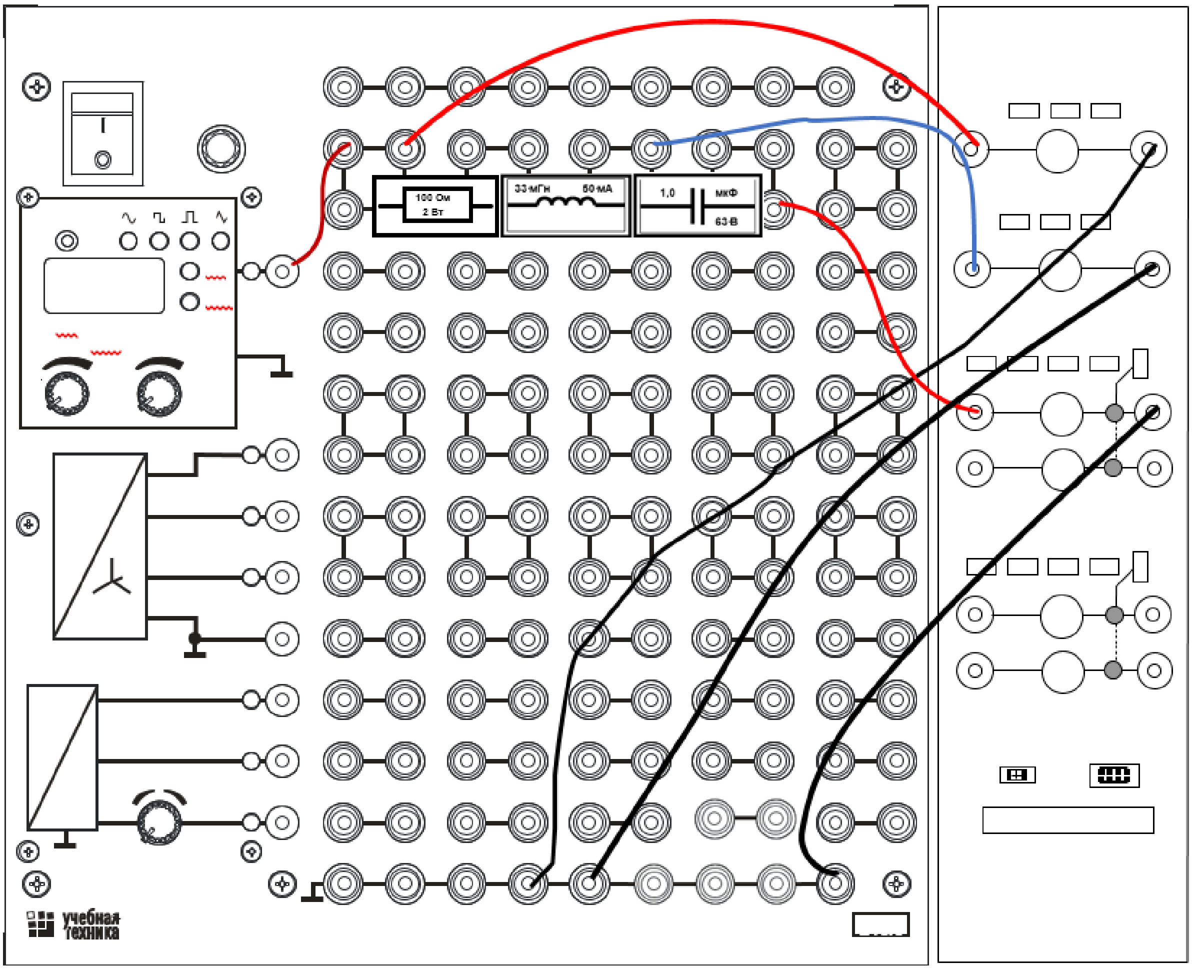



Рис. 3 Монтажная схема электрической цепи

- Установите на источнике принятые значение частоты и амплитуды. Форму входного сигнала выберете в соответствии с номером стенда из таблицы 1. Перенесите осциллограммы на рис.7. Запишите в табл. 2 действующие значения тока и напряжения на конденсаторе.
- По вольтметру V0, подключенному ко входу цепи, при помощи виртуального измерителя активной мощности снимите показание и занесите его также в табл. 2.
- В программе Multisim соберите модель исследуемой цепи и модель источника несинусоидального напряжения в виде последовательного соединения синусоидальных источников, соответствующих разным гармоникам (рис. 4.). Получите осциллограммы входного и выходного напряжений схемы. Сравните результат моделирования осциллограммы (по типу показанной на рис. 5) с рис.6 и 7.
- Сравните результаты расчёта и эксперимента и сделайте выводы.

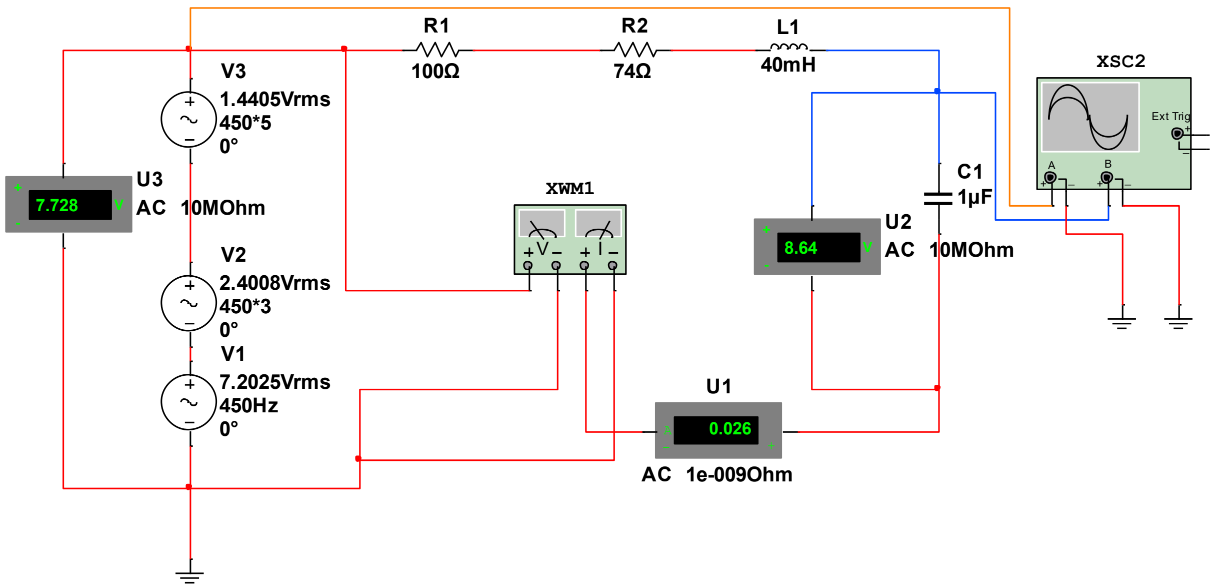

R1
100Ω
R2
74Ω
L1
40mH
XSC2
Ext Trig
V3
1.4405Vrms
450*5
0°
U3
7.728
AC 10MOhm
XWM1
C1
1µF
U2
8.64
AC 10MOhm
V2
2.4008Vrms
450*3
0°
V1
7.2025Vrms
450Hz
0°
U1
0.026
AC 1e-009Ohm

Рис. 4

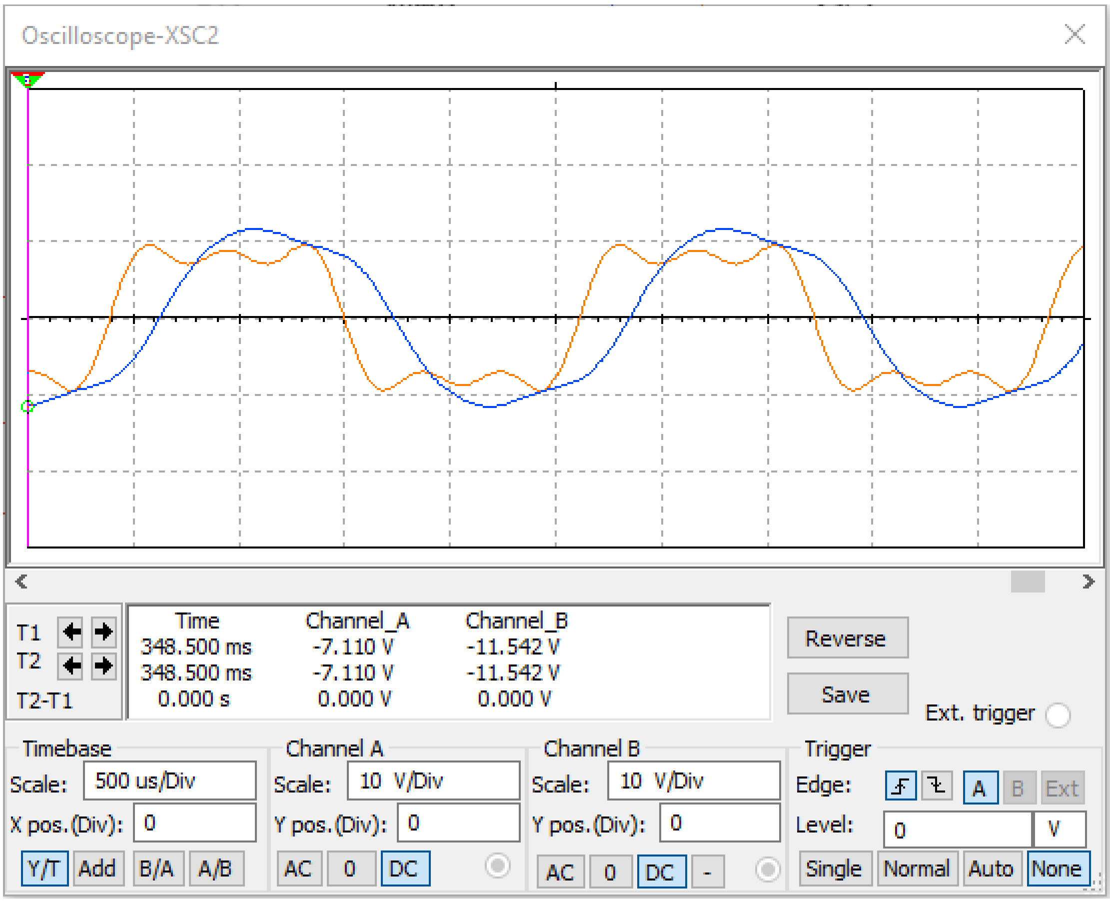
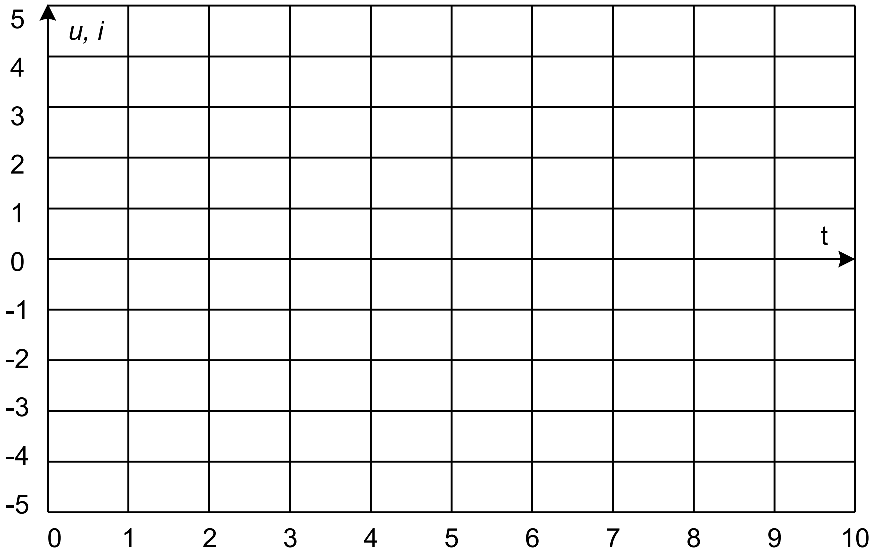

Oscilloscope-XSC2
T1
T2
T2-T1
Time
348.500 ms
348.500 ms
0.000 s
Channel_A
-7.110 V
-7.110 V
0.000 V
Channel_B
-11.542 V
-11.542 V
0.000 V
Reverse
Save
Ext. trigger
Timebase
Scale: 500 us/Div
X pos.(Div): 0
Y/T Add B/A A/B
Channel A
Scale: 10 V/Div
Y pos.(Div): 0
AC 0 DC
Channel B
Scale: 10 V/Div
Y pos.(Div): 0
AC 0 DC -
Trigger
Edge: A B Ext
Level: 0 V
Single Normal Auto None

Рис. 5

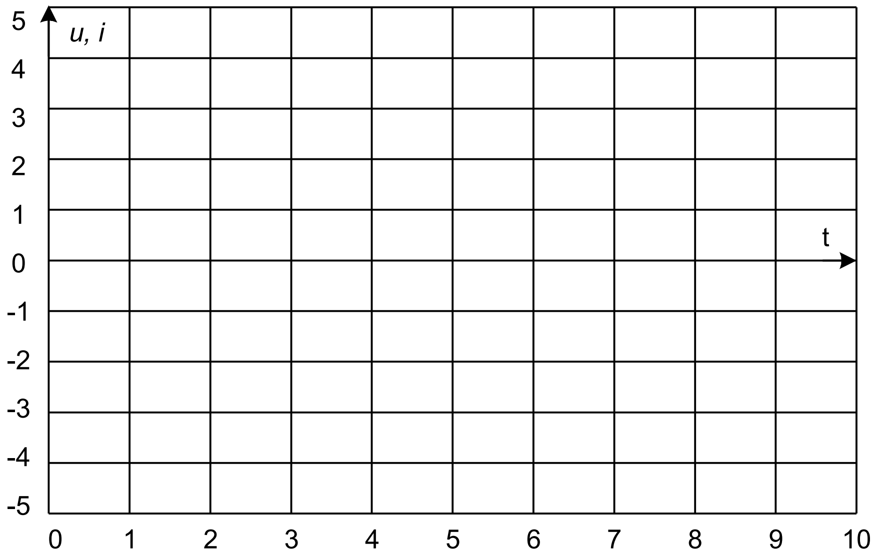
Таблица 2

| | I, мА | U, В | $U_C$, В | P. мВт |
|---|---|---|---|---|
| Расчётные значения | | | | |
| Экспериментальные значения | | | | |
| Экспериментальные значения (виртуальный эксперимент) | | | | |




Расчётные графики
$m_U$=.............В/дел.
$m_I$=...........mA/дел.
$m_t$=............мС/дел.

Рис. 6




Экспериментальные графики
$m_U$=.............В/дел.
$m_I$=...........mA/дел.
$m_t$=............мС/дел.

Рис. 7

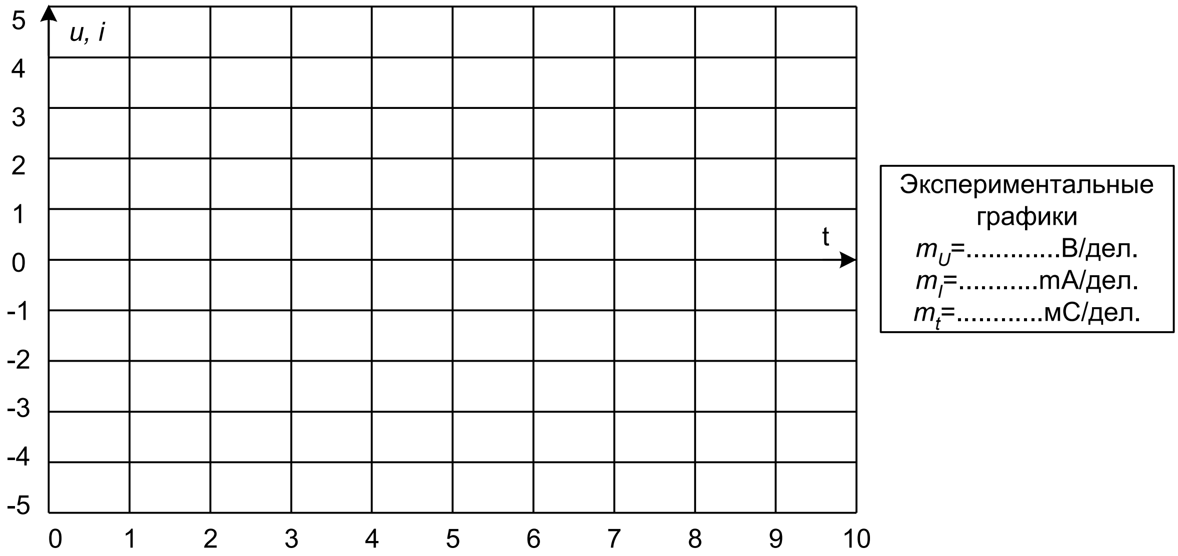



Рис. 8

## Типовые вопросы для защиты лабораторной работы:

1. Записать аналитическое выражение разложения в ряд Фурье для напряжения в форме однополярных импульсов.
2. Определить коэффициенты амплитуды для следующих форм напряжения:
   а) меандр;
   б) однополупериодное выпрямление;
   в) однополярный импульс.
3. Сравнить полученные коэффициенты с коэффициентом амплитуды синусоидальной функции.
4. Определить коэффициенты формы для следующих форм напряжения:
   а) меандр;
   б) однополупериодное выпрямление;
   в) однополярный импульс.

   Сравнить полученные коэффициенты с коэффициентом формы синусоидальной функции.
5. По результатам полученных экспериментальных данных произвести расчет следующих коэффициентов для тока:
   - коэффициент амплитуды;
   - коэффициент формы;
   - коэффициент искажения;
   - суммарный коэффициент гармонических составляющих;
   - коэффициенты гармонических составляющих (k=3; k=5).
6. Как изменятся кривые мгновенных значений несинусоидального тока и напряжения на конденсаторе в RC-цепи, если напряжение на входе имеет форму однополярных импульсов?
7. Как изменятся действующие значения несинусоидального тока и напряжения на индуктивной катушке в RL-цепи, если напряжение на входе имеет форму однополярных импульсов?
8. На практическом примере для электрической цепи несинусоидального тока продемонстрируйте отличия в результатах измерений напряжений и токов приборами электромагнитной, магнитоэлектрической и индукционной систем.

## Приложение 1. Расчет в среде MathCad

$n := 1, 3 .. 11$ — Номера гармоник, принятые для расчёта

$Um := 8 \quad f := 450$ — Амплитуда и частота приложенного напряжения

$R := 100 \quad Rk := 74 \quad L := 0.04 \quad C := 10^{-6}$ — Параметры элементов цепи

$w := 2 \cdot 3.14 \cdot f$ — Вычисление круговой частоты

$$U_n := \frac{4 \cdot Um}{3.14 \cdot n}$$

Вычисление амплитуд гармоник для прямоугольного двуполярного напряжения

| $n =$ | $U_n =$ |
|---|---|
| 1 | 10.191 |
| 3 | 3.397 |
| 5 | 2.038 |
| 7 | 1.456 |
| 9 | 1.132 |
| 11 | 0.926 |

Вычисленные амплитуды гармоник приложенного напряжения

$$Z_n := R + Rk + j \cdot \left( n \cdot w \cdot L - \frac{1}{n \cdot w \cdot C} \right)$$

Вычисление комплексного сопротивления цепи для каждой гармоники

$$I_n := \frac{U_n}{Z_n}$$

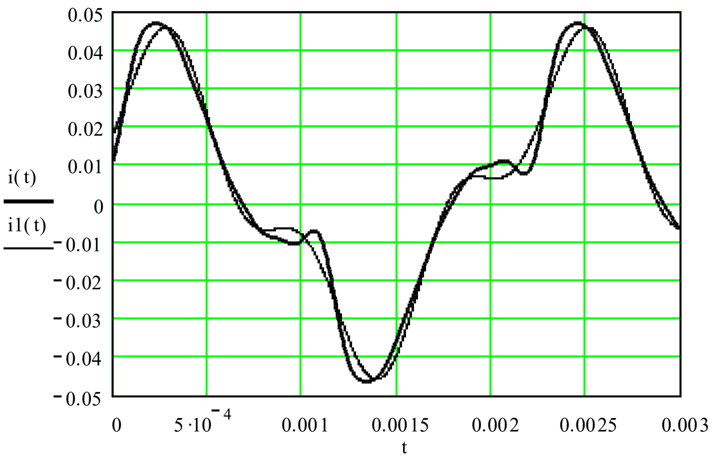
Расчёт амплитуд тока каждой гармоники по закону Ома в комплексной форме

$$i(t) := \sum_n \operatorname{Im}\left( I_n \cdot e^{j \cdot n \cdot w \cdot t} \right)$$

Переход к мгновенным значениям и суммирование всех рассчитанных гармоник тока

$$i1(t) := \sum_{n=1}^{3} \operatorname{Im}\left( I_n \cdot e^{j \cdot n \cdot w \cdot t} \right)$$

Суммирование первой и третьей гармоник тока




Расчётные графики

## Приложение 2. Расчет в среде MATLAB

```
clear;
Um=8; % Амплитуда входного сигнала
f=450; % Частота входного сигнала
w=2*pi*f; % Угловая частот входного сигнала
T=1/f; % Период входного сигнала
K=11; % Количество гармоник

R=100; % Сопротивление резистора
Rk=74; % Активное сопротивление катушки индуктивности
L=0.04; % Индуктивность
C=10^-6; % Ёмкость

tt=0:T/1000:T*2; % Текущее время

S_in = zeros(1,length(tt)); % Задаем размерность массива
                            % входного напряжения
S_out = zeros(1,length(tt)); % Задаем размерность массива
                            % выходного напряжения
S_i = zeros(1,length(tt)); % Задаем размерность массива тока

Umk = zeros(1,K); % Задаем размерность массива
                    % комплексного спектра входного напряжени
Uck = zeros(1,K); % Задаем размерность массива
                    % комплексного спектра выходного напряжени
Zk=zeros(1,K); % Задаем размерность массива комплексного спектра тока

for k = 1:K
    Umk(k) = 2*Um*(1-(-1)^k)/(pi.*k); % комплексный спектр
                                        % входного напряжения
    Zk(k)=R+Rk+1i*(k*w*L-1/(k*w*C)); % комплексное сопротивление цепи
                                        % для каждой гармоники
    S_in = S_in + abs(Umk(k))*sin(k*w*tt+angle(Umk(k))); % входное
                                        % напряжение (сумма ряда)
    Ik(k)=Umk(k)/Zk(k); % комплексный спектр тока
    Uck(k)=Ik(k)*-1i/(k*w*C); % комплексный спектр выходного напряжения
    S_out = S_out + abs(Uck(k))*sin(k*w*tt+angle(Uck(k))); % выходное
                                            % напряжение (сумма ряда)
    S_i = S_i + abs(Ik(k))*sin(k*w*tt+angle(Ik(k))); % ток (сумма ряда)
end

figure(1) % строим графики входного и выходного напряжений
            % в зависимости от времени

plot(tt,S_in);
grid on
axis([0 0.005 -25 25])
set(gca, 'XTick', [0:0.0005:0.005], 'YTick', [-25:5:25])
hold on
plot(tt,S_out);

figure(2) % строим график тока в зависимости от времени
```

```
plot(tt,S_i);
grid on
axis([0 0.005 -0.05 0.05])
set(gca, 'XTick', [0:0.0005:0.005], 'YTick', [-0.05:0.01:0.05])


A=sqrt(sum(Ik.*conj(Ik))/2);
V0=sqrt(sum(Umk.*conj(Umk)));
Vc=sqrt(sum(Uck.*conj(Uck)));
P=sum(Umk.*conj(Ik))/2;
```